Problemy z ograniczeniami

Dlaczego zadania z ograniczeniami

- Wiele praktycznych problemów to problemy z ograniczeniami.
- Problemy trudne obliczeniowo (np-trudne) to prawie zawsze problemy z ograniczeniami.
- Ograniczenia sprawiają, że nie każda kombinacja zmiennych z których każda ma poprawną (ze swojej dziedzin) wartość jest ***rozwiązaniem dopuszczalnym*** problemu.
- Niestety radzenie sobie z ograniczeniami nie jest proste w przypadku algorytmów ewolucyjnych, ponieważ operatory krzyżowania i mutacji nie uwzględniają ograniczeń.
  - Nawet jeżeli rodzice spełniają ograniczenia i są rozwiązaniami dopuszczalnymi, nie mamy gwarancji że wynik krzyżowania i mutacji będzie rozwiązaniem dopuszczalnym.
- Problemy z ograniczeniami możemy podzielić na:
  - Problemy optymalizacji z ograniczeniami.
  - Problemy spełnienia ograniczeń.

Swobodna przestrzeń przeszukiwań

- Mamy L zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_L$. z których każda ma swoją dziedzinę $D_1, D_2, \ldots, D_L$. Dziedziny mogą być dyskretne albo ciągłe (ale jeżeli są ciągłe to są wypukłe)

- Swobodną przestrzenią poszukiwań nazywamy iloczyn kartezjański

$$D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_L$$

- Cecha swobodnej przestrzeni poszukiwań: sprawdzenie czy rozwiązanie $x=(x_1, x_2, \ldots, x_L)$ należy do dziedziny D możemy przeprowadzić wykonując osobny test przynależności zmiennej x_i do dziedziny D_i ; jeżeli wszystkie testy dadzą wynik pozytywny to $x \in D$

- Przykład swobodnej przestrzeni przeszukiwań: $-5.12 \leq x_i \leq 5.12$ dla i=1,2,...,L.\

- Swobodna przestrzeń poszukiwań nie sprawia problemów przy optymalizacji algorytmami ewolucyjnymi, ponieważ, nawet jeżeli wynik operatorów krzyżowania i mutacji nie należy do tej przestrzeni, to bardzo łatwo możemy to wymusić wykonując poprawki dla indywidualnych zmiennych. Przykładowo:

```
if (x_i<-5.12) x_i=-5.12
if (x_i>5.12) x_i=5.12
```

Klasyfikacja problemów z ograniczeniami

Ograniczenia \ Funkcja celu	TAK	NIE
TAK	Probmlem opty-malizacji z ograniczeniami	Problem spełni-ania ograniczeń
NIE	Problem opty-malizacji bez ograniczeń	Nie ma problemu ☺

- Terminologia angielska:
  - free optimization problem (problem optymalizacji bez ograniczeń)
  - constraint satisfaction problem (problem spełniania ograniczeń)
  - constrained optimization problem (problem optymalizacji z ograniczeniami).

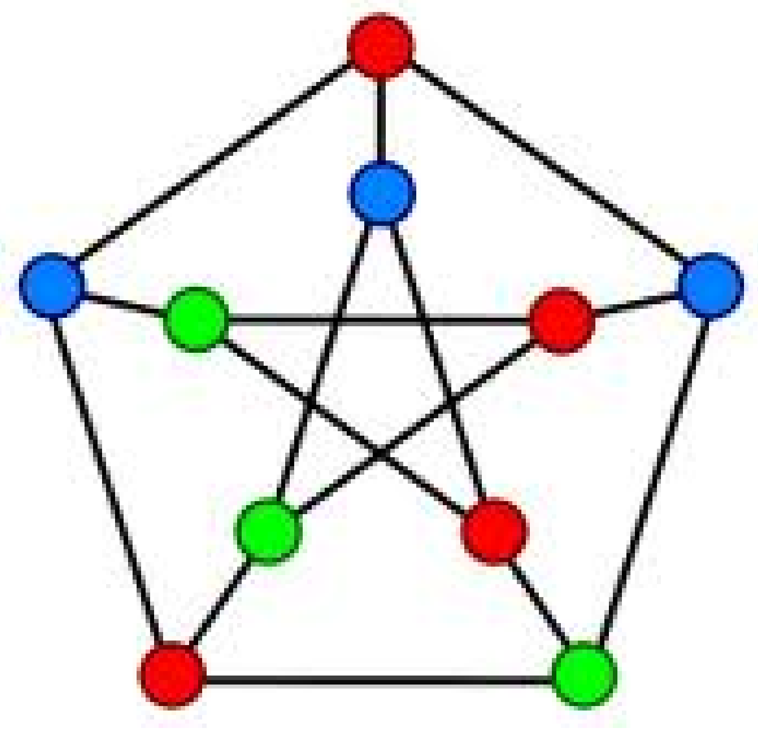
Problem spełnienia ograniczeń

- Dana jest para (D,φ), gdzie D jest swobodną przestrzenią poszukiwań, a φ jest formułą (funkcją boolowską na zbiorze D).
- Formuła φ jest nazywana ***warunkiem dopuszczalności*** (ang. feasibility condition).
- Zazwyczaj warunek dopuszczalności jest warunkiem złożonym, składającym się z wielu ograniczeń, z których każde narzuca ***ograniczenie*** dla dopuszczalnych kombinacji wartości zmiennych.
- Przykład: 3-kolorowanie grafu. Dany jest graf G=(V,E), gdzie $E \subset V \times V$

  Czy istnieje takie przypisanie kolorów wierzchołkom, które pozwala na pokolorowanie grafu przy pomocy trzech kolorów tak, że nie istnieją dwa wierzchołki połączone krawędzią którym przypisano ten sam kolor.
- Bardziej formalnie:
  - swobodną przestrzenią przeszukiwań jest D^L, gdzie L=|V| a D={1,2,3}. (Każda z L zmiennych ma tę samą dziedzinę).Niech rozwiązanie x ma postać $(x_1,x_2,...,x_L)$
  - $\varphi(x)=true \Leftrightarrow \forall_{e \in E} C_e(x_1,x_2,\ldots,x_L)=true$
  - C_e jest ograniczeniem związanym z krawędzią e. Niech e=(k,l)

    $C_e(x_1,x_2,\ldots,x_L)=true \Leftrightarrow x_k \neq x_l$

3-kolorowanie grafu przykład



- Problem NP-trudny.
- Trudność rozwiązania problemu spełnienia ograniczeń przez algorytm ewolucyjny polega na braku funkcji do optymalizacji.
- Można w tym sobie poradzić przekształcając zbiór ograniczeń w funkcję celu do zminimalizowania, taką że osiągnięcie minimum oznacza spełnienie ograniczeń.

Problem optymalizacji dyskretnej z ograniczeniami - binarne zagadnienie plecakowe

- Dane jest N przedmiotów, z których każdy posiada
  - masę m_i
  - wartość w_i
- Dany jest plecak, który możemy umieścić elementy o sumarycznej masie M
- Jakie przedmioty zabrać do plecaka, tak aby sumaryczna wartość przedmiotów była jak największa ?

i	Nazwa	m_i	w_i
1	Zegarek	0.2	10
2	Buty	1	2
3	Spodnie	0.5	2
4	Czapka	0.2	1
5	Kurtka	1	3
6	Piwo	1	1

M=2

Zagadnienie plecakowe: sformułowanie

i	Nazwa	m_i	w_i
1	Zegarek	0.2	10
2	Buty	1	2
3	Spodnie	0.5	2
4	Czapka	0.2	1
5	Kurtka	1	3
6	Piwo	1	1

M=2

- Postać rozwiązania: (L=6) $x=[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6], x_i \in \{0,1\}$
- Optymalizowana funkcja: $f(x)=\sum_{1}^{L} x_i * w_i$
- Ograniczenie $g(x)=\sum_{1}^{L} x_i * m_i < M$

Metody radzenia sobie z ograniczeniami

- Operatory krzyżowania/mutacji/inicjalizacji zachowujące ograniczenia (jeżeli rodzice spełniają ograniczenia to potomkowie także). Przykład: operatory krzyżowania i mutacji dla problemu komiwojażera.
    - W niektórych zadaniach wygenerowanie rozwiązania dopuszczalnego jest problemem trudnym obliczeniowo (np. NP-trudnym).
- Stosuj funkcje kary, obniżające dopasowanie osobnika naruszającego ograniczenia.
    - Zakładamy przy tym, że możliwe jest obliczenie dopasowania dla niedopuszczalnego rozwiązania.
- Stosuj algorytm naprawy konwertujący rozwiązania dopuszczalne na niedopuszczalne.
- Stosuj dekoder odwzorowujący genotyp w fenotyp, tak że rozwiązania (fenotypy) są zawsze dopuszczalne.
- Stosuj kombinację powyższych technik (np. operator i inicjalizacja gwarantujące spełnienie części ograniczeń, pozostałe przekształć w funkcję kary)

Funkcje kary

- Zakładając problem minimalizacji, zastosowanie funkcji kary polega na przekształceniu funkcji celu f(x) w funkcję f'(x):

$$f'(x) = f(x) + P(d(x, F))$$

- gdzie d(x,F) jest odległością rozwiązania x od przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych. P jest funkcją kary spełniającą warunek P(0)=0, P(d) jest funkcją rosnącą.
- Jeżeli w zadaniu mamy m ograniczeń, to funkcja kary może być zapisana jako:

$$P(d(x, F)) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i (d_i(x))^k$$

  gdzie $d_i(x)$ jest karą za naruszenie i-tego ograniczenia, ω_i jest wagą i-tego ograniczenia, k jest parametrem (często 1 lub dwa).

- Problem ze zdefiniowaniem wag ograniczeń:
  - Zbyt duże wagi: Każde rozwiązanie dopuszczalne jest w minimum lokalnym f'(x).
  - Zbyt małe wagi: algorytm znajduje rozwiązanie niedopuszczalne.

3-kolorowanie grafu - funkcja kary

- Funkcja P_1:

$$P_1(x)=\sum_{i=1}^{|E|}\lambda_i(x,C_i) \qquad \lambda_i(x,C_i)=\begin{cases}1 & \text{jeżeli } C_i(x)=\mathit{false}\\ 0 & \text{jeżeli } C_i(x)=\mathit{true}\end{cases}$$

- C_i to ograniczenie związane z i-tą krawędzią. Funkcja P_1 zlicza liczbę niepoprawnych krawędzi (łączących wierzchołki o identycznym kolorze).

- Funkcja P_2 zlicza liczbę niepoprawnych wierzchołków (wierzchołków dla których istnieje przynajmniej jeden wierzchołek połączony krawędzią, i mający taki sam kolor).
- Wynik algorytmu (algorytm skonfigurowany na minimalizację):
  - Jeżeli zatrzymasz się z wartością funkcji kary równą 0, to rozwiązanie spełnia ograniczenia.
  - Jeżeli zatrzymasz się z wartością funkcji kary większą od zera, to nie udało się znaleźć rozwiązania spełniającego ograniczenia, (nie ma gwarancji że takiego rozwiązania nie ma).

3-kolorowanie grafu - dekoder

- Rozwiązanie ma postać permutacji wierzchołków (Możemy wykorzystać operatory działające na permutacjach, w szczególności krzyżowanie OX).
- Dekoder odwzorowuje przestrzeń wszystkich permutacji w przestrzeń kolorowań w następujący sposób:
  - Przypisuj kolory do wierzchołków w kolejności wskazanej w permutacji, próbując kolorów o rosnących numerach. (Jeżeli przypisanie wierzchołkowi v koloru pierwszego spowodowałoby naruszenie ograniczeń, ponieważ inny już pokolorowany wierzchołek połączony z v krawędzią ma kolor pierwszy, to spróbuj koloru drugiego).
  - Jeżeli wierzchołek v nie da się pokolorować za pomocą trzech kolorów bez naruszenia ograniczeń, to zostaw go niepokolorowany).
  - Funkcję dopasowania zdefiniuj jako liczbę wierzchołków, które pozostały niepokolorowane. Funkcja ta ma następującą własność jest równa minimum (0) jeżeli wszystkie wierzchołki zostały pokolorowane przy pomocy trzech kolorów.
- W ten sposób przekształciliśmy problem optymalizacji z ograniczeniami w inny problem optymalizacji z ograniczeniami, dla którego znamy operatory ewolucyjne zachowujące dopuszczalność rozwiązań.

Zagadnienie plecakowe: funkcja kary

- Jedyne ograniczenie ma postać: $g(x)=\sum_{1}^{L} x_i * m_i < M$
- Funkcja kary P(x) może mieć postać:

$$P(x)=\begin{cases} \omega * \left(\sum_{1}^{L} x_i * m_i - M\right)^2 & \text{jeżeli} \sum_{1}^{L} x_i * m_i > M \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

- ω jest parametrem. Kara rośnie proporcjonalnie do kwadratu naruszenia ograniczenia.
- Funkcja dopasowania przyjmuje postać:

$$f(x)=\sum_{1}^{L} x_i * w_i - P(x)$$

Zagadnienie plecakowe: algorytmy naprawy oraz dekodery

- Dodatkowy krok po krzyżowaniu i mutacji: naprawa rozwiązań niedopuszczalnych.

- Algorytm 1 (probabilistyczny): Losowo usuwaj przedmioty z plecaka aż uzyskasz spełnienie ograniczenia.

- Algorytm 2: (deterministyczny). Posortuj przedmioty w plecaku pod względem stosunku w_i/m_i. Usuwaj przedmioty począwszy od przedmiotu o najmniejszym stosunku w_i/m_i.

- Algorytm 2 może być również wykorzystany jako dekoder. Stosowany jest wtedy do obliczenia dopasowania osobnika. W tym przypadku osobnik otrzymuje dopasowanie rozwiązania dopuszczalnego otrzymanego w wyniku zastosowania algorytmu 2, ale nie jego genotyp.

Projekt z zagadnieniem plecakowym

- Powinien zawierać porównanie 4 algorytmów:
  - Z funkcją kary.
  - Z naprawą (dwa algorytmy)
  - Z dekoderem.

Literatura

- Michalewicz Z., Algorytmy genetyczne + struktury danych=programy ewolucyjne, WNT, Warszawa 19, rozdział 7 poświęcony problemom optymalizacji z ograniczeniami.

- A. E. Eiben, J. Smith, Introduction to Evolutionary Computing, Springer, 2003, rozdział 7 poświęcony problemom z ograniczeniami.

- B. G. W. Craenen, A. E. Eiben, J. I. van Hemert, Comparing evolutionary algorithms on binary constraint satisfaction problems, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 7(5), s. 424 - 444, 2003. artykuł na temat problemów spełnienia ograniczeń.

- A. E. Smith and D. W. Coit, Penalty functions, Handbook of Evolutionary Computation, Oxford University Press and Institute of Physics Publishing, 1995 - omówienie i klasyfikacja funkcji kar.